Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 18 giugno 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x^3(\log x - 1)$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \frac{2^n}{n+1} \log\left(1 + e^{-n}\right).$$

Soluzione

Osserviamo che che $e^{-n} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $\log(1 + e^{-n}) > \log 1 = 0$ e la serie è a termini positivi. Ricordiamo ora che

$$\log(1 + t) = t + o(t), \text{ per } t \to 0.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, sostituiamo $t = e^{-n}$ ottenendo

$$\log(1 + e^{-n}) = e^{-n} + o(e^{-n}) = e^{-n}(1 + o(1)) \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi, poniamo

$$a_n = \frac{2^n}{n+1} \log\left(1 + e^{-n}\right) = \frac{2^n}{n+1} e^{-n}(1 + o(1)) = \frac{2^n}{e^n}\frac{1}{n+1}(1 + o(1)).$$

Utilizziamo ora il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{e}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\sqrt[n]{1 + o(1)} \to \frac{2}{e}.$$

Poiché $\frac{2}{e} < 1$ otteniamo che la serie converge.

Esercizio 3 Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{(x^2 - 1)^2}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Poniamo $f(x) = \dfrac{(\log x)^\alpha}{(x^2-1)^2}$ e osserviamo che f non è definita per $x = 1$ e che $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$. Spezziamo quindi l'intervallo di integrazione nel punto $x = 2$. Ricordiamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t), \qquad \text{per } t \to 0$$

e osserviamo che, sostituendo $t = x - 1$ otteniamo

$$\log x = \log(1+(x-1)) = \log(1+t) = t + o(t) = x - 1 + o(x-1) = (x-1)(1+o(1)) \qquad \text{per } x \to 1.$$

Quindi, per $x \to 1^+$ risulta

$$f(x) = \frac{(\log x)^\alpha}{(x^2-1)^2} = \frac{((x-1)(1+o(1)))^\alpha}{((x-1)(x+1))^2} = \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^2}\frac{(1+o(1))^\alpha}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)^{2-\alpha}}\frac{(1+o(1))^\alpha}{(x+1)^2}.$$

Se scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^{2-\alpha}}$ risulta che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(1+o(1))^\alpha}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico f e g si comportano allo stesso modo ai fini della convergenza. Dato che $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$ converge se e solo se $2 - \alpha < 1$, cioè se $\alpha > 1$, otteniamo che $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha > 1$, altrimenti diverge positivamente.

Vediamo ora l'altro integrale. In questo caso scegliamo $h(x) = \dfrac{1}{x^4(\log x)^{-\alpha}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1.$$

Dato che $\displaystyle\int_2^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, indipendentemente dal valore di α.

Unendo i due risultati otteniamo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se $\alpha > 1$ e diverge positivamente se $\alpha \le 1$.