Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 18 giugno 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x^3(\log x - 1)$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \frac{2^n}{n+1} \log\left(1 + e^{-n}\right).$$

Soluzione

Osserviamo che che $e^{-n} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $\log(1 + e^{-n}) > \log 1 = 0$ e la serie è a termini positivi. Ricordiamo ora che

$$\log(1 + t) = t + o(t), \text{ per } t \to 0.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, sostituiamo $t = e^{-n}$ ottenendo

$$\log(1 + e^{-n}) = e^{-n} + o(e^{-n}) = e^{-n}(1 + o(1)) \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi, poniamo

$$a_n = \frac{2^n}{n+1} \log\left(1 + e^{-n}\right) = \frac{2^n}{n+1} e^{-n}(1 + o(1)) = \frac{2^n}{e^n}\frac{1}{n+1}(1 + o(1)).$$

Utilizziamo ora il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{e}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\sqrt[n]{1 + o(1)} \to \frac{2}{e}.$$

Poiché $\frac{2}{e} < 1$ otteniamo che la serie converge.

Esercizio 3 Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{(x^2 - 1)^2}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione